TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 01

Miguel Ángel García Álvarez

Álgebras y σ-álgebras

Definición 1. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Diremos que:*

1. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo complementos si $A^c \in \mathcal{G}$ para cualquier $A \in \mathcal{G}$.*
2. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo diferencias propias si $B - A \in \mathcal{G}$ para cualquier pareja $A, B \in \mathcal{G}$ tal que $A \subset B$.*
3. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) finitas si $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier colección finita $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de elementos de $\mathcal{G}$.*
4. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) infinitas numerables si $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier colección infinita numerable $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de elementos de $\mathcal{G}$.*
5. *$\mathcal{G}$ es cerrada bajo uniones (resp. intersecciones) monótonas si $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$ (resp. $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{G}$) para cualquier sucesión creciente (resp. decreciente) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de $\mathcal{G}$.*

Definición 2 (álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto. Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$ es un álgebra si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathbb{F} \in \mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrada bajo complementos.*
3. *$\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones finitas.*

Definición 3 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra). *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto. Se dice que una familia $\Im$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$ es una σ-álgebra si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\mathbb{F} \in \Im$.*
2. *$\Im$ es cerrada bajo complementos.*
3. *$\Im$ es cerrada bajo uniones infinitas numerables.*

Obsérvese que toda σ-álgebra es también un álgebra. En efecto, como $\mathbb{F} \in \Im$ y $\Im$ es cerrada bajo complementos, el conjunto vacío $\emptyset$ pertenece a $\Im$. Así que, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son de elementos de $\Im$, entonces, definiendo $A_j = \emptyset$ para cualquier $j > n$, se tiene:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Im$$

Aunque está dicho en las definiciones, enfatizo que un álgebra, o una σ-álgebra, es un conjunto cuyos elementos son conjuntos.

Definición 4. *Sea $\mathbb{F}$ un conjunto y $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$. Llamaremos* ***álgebra generada por*** *$\mathcal{G}$ a la más pequeña familia de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que forme un álgebra y que contenga a todos los elementos de $\mathcal{G}$.*

Ejemplo 1. *Tomemos como $\mathbb{F}$ al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.*

a) Definamos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$

El álgebra $\mathcal{A}$ generada por los conjuntos A y B está dada por:

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8, 9, 10, \ldots\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 7, 8, 9, 10, \ldots\},$

$\{3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8, 9, 10, \ldots\}, \{5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$

$\{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, \ldots\}, \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}, \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}, \mathbb{N}\}$

b) Sean A y B dos subconjuntos distintos de $\mathbb{N}$ y tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cup B \neq \mathbb{N}$.

Con el objeto de tener conjuntos ajenos de tal manera que A_1, A_2 y $\mathbb{N}$ se puedan expresar como unión de algunos de ellos, partiendo de A_1, A_2 vamos a definir 2^2 conjuntos ajenos, de la siguiente manera:

$D_1 = A \cap B$

$D_2 = A \cap B^c$

$D_3 = A^c \cap B$

$D_4 = A^c \cap B^c$

El álgebra $\mathcal{A}$ generada por los conjuntos A y B está dada por:

$\mathcal{A} = \{\emptyset, D_1, D_2, D_3, D_4, D_1 \cup D_2, D_1 \cup D_3, D_1 \cup D_4, D_2 \cup D_3, D_2 \cup D_4, D_3 \cup D_4,$

$D_1 \cup D_2 \cup D_3, D_1 \cup D_2 \cup D_4, D_1 \cup D_3 \cup D_4, D_2 \cup D_3 \cup D_4, \mathbb{N}\}$

Ejemplo 2. *Tomemos como $\mathbb{F}$ al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y definamos:*

$A = [1, 3]$

$B = [2, 4]$

Siguiendo el ejemplo 1b, definamos:

$D_1 = A \cap B = [2,3]$

$D_2 = A \cap B^c = [1,2)$

$D_3 = A^c \cap B = (3,4]$

$D_4 = A^c \cap B^c = (-\infty,1) \cup (4,\infty)$

El álgebra $\mathcal{A}$ generada por los conjuntos A y B está dada por:

$\mathcal{A} = \{\emptyset, [2,3], [1,2), (3,4], (-\infty,1) \cup (4,\infty),$

$[1,3], [2,4], (-\infty,1) \cup [2,3] \cup (4,\infty), [1,2) \cup (3,4], (-\infty,2) \cup (4,\infty), (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$[1,4], (-\infty,3] \cup (4,\infty), (-\infty,1) \cup [2,\infty), (-\infty,2)\,\mathbb{F} \cup (3,\infty), \mathbb{R}\}$

Ejemplo 3. *Dados 3 subconjuntos, A, B y C, de un conjunto $\mathbb{F}$, podemos seguir el mismo procedimiento que seguimos para el caso de dos conjuntos. Considerando intersecciones, definimos 2^3 conjuntos:*

$D_1 = A \cap B \cap C$

$D_2 = A \cap B \cap C^c$

$D_3 = A \cap B^c \cap C$

$D_4 = A \cap B^c \cap C^c$

$D_5 = A^c \cap B \cap C$

$D_6 = A^c \cap B \cap C^c$

$D_7 = A^c \cap B^c \cap C$

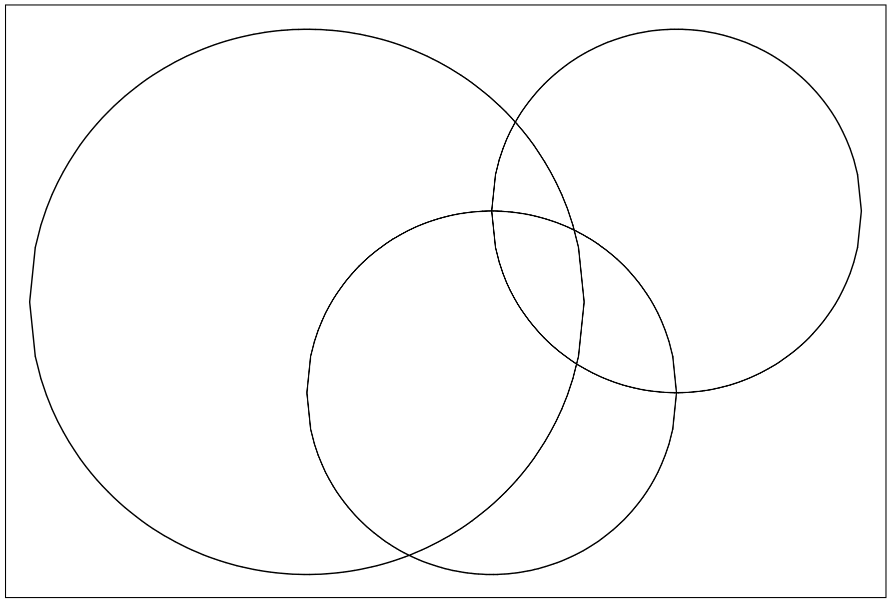
$D_8 = A^c \cap B^c \cap C^c$

Tomando el conjunto vacío, $\mathbb{F}$, cada uno de los 8 conjuntos, las $\binom{8}{2}$ uniones por parejas, las $\binom{8}{3}$ uniones por ternas, las $\binom{8}{4}$ uniones tomadas de 4 en 4, etcétera, hasta llegar a las $\binom{8}{7}$ uniones tomadas de 7 en 7, obtenemos un total de:

$\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 2^8 = 256$

conjuntos.

Quitando los que se repitan, obtenemos el algebra generada por los conjuntos A, B y C.



Ejercicio 1. *Tomando como* $\mathbb{F}$ *al conjunto* $\mathbb{N}$ *de los números naturales, definamos* A *como el conjunto formado por todos los múltiplos de* 2 *y* B *como el conjunto formado por todos los múltiplos de* 3*. Encuentra los* 16 *conjuntos que forman el álgebra generada por* A *y* B*.*

Ejercicio 2. *Tomando como* $\mathbb{F}$ *al conjunto* $\mathbb{R}$ *de los números reales, definamos* A *como el conjunto formado por la unión de todos los intervalos cerrados cuyos extremos sean dos números pares consecutivos y que no se intersecten y* B *como el conjunto formado por la unión de todos los intervalos cerrados cuyos extremos sean dos números impares consecutivos y que no se intersecten; es decir:*

$A = [2,4] \cup [6,8] \cup [10,12] \cup \cdots$

$B = [1,3] \cup [5,7] \cup [9,11] \cup \cdots$

Encuentra los 16 *conjuntos que forman el álgebra generada por* A *y* B*.*

Ejercicio 3. *Sea* $\mathcal{J}$ *el conjunto por el vacío y todos los intervalos de la forma* $(a,b]$*,* $(-\infty, c]$ *o* (d, ∞)*, donde* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *y* $a < b$*.*

Demuestra que el conjunto $\mathcal{A}$ *formado por todos los conjuntos de la forma* $\bigcup_{k=1}^{n} J_k$ *donde* $n \in \mathbb{N}$ *y* $J_1, \ldots, J_n$ *son intervalos en* $\mathcal{J}$*, ajenos por parejas, es un álgebra de subconjuntos de* $\mathbb{R}$*.*

Definición 5 (Intersección de σ-álgebras). *Dado un conjunto $\mathbb{F}$ y una familia arbitraria de σ-álgebras de subconjuntos de $\mathbb{F}$, se define la intersección de esas σ-álgebras como la familia de conjuntos que pertenecen a todas ellas.*

Se puede ver fácilmente que la intersección de σ-álgebras de subconjuntos de $\mathbb{F}$ es también una σ-álgebra y, dada una colección arbitraria $\mathcal{B}$ de subconjuntos de $\mathbb{F}$, siempre existe por lo menos una σ-álgebra que contiene a todos los elementos de $\mathcal{B}$, a saber, la formada por todos los subconjuntos de $\mathbb{F}$. Se puede definir entonces una σ-álgebra como la intersección de todas las σ-álgebras de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que contienen a todos los elementos de $\mathcal{B}$.

Definición 6 (σ álgebra generada por una familia de conjuntos). *Dada una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{F}$, se define la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ como la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a todos los conjuntos de $\mathcal{A}$. Denotaremos por $\sigma(\mathcal{A})$ a esta σ-álgebra.*

Evidentemente la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ es la más pequeña σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}$ que contiene a todos los elementos de $\mathcal{A}$.

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$

Una σ-álgebra de particular importancia es la de los conjuntos borelianos en $\mathbb{R}$ y, de manera más general, en $\mathbb{R}^n$.

Los conjuntos borelianos deben su nombre a Émile Borel quien los introdujo para caracterizar a los subconjuntos de $\mathbb{R}$ a los cuales se les puede asignar una longitud.

La idea fundamental consiste en que se puede asignar una longitud a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se puedan obtener a partir de los intervalos mediante las operaciones conjuntistas de unión numerable y diferencia. La definición moderna se basa en la generación de σ-álgebras de acuerdo con la definición anterior.

Cuando hablemos de intervalos de números reales, vamos a incluir tanto a los finitos como a los infinitos. Explícitamente, el conjunto de los intervalos de números reales está formado por todos los de los tipos siguientes:

1. Los intervalos con extremos a y b, de cualquier tipo, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

2. Los intervalos de la forma $[a, a]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞) y $[a, \infty)$, donde a es un número real cualquiera.

3. El intervalo $(-\infty, \infty)$.

De acuerdo con lo anterior, no consideraremos como intervalo al conjunto vacío.

Cuando los dos extremos de un intervalo sean números reales, diremos que el intervalo es finito; en caso contrario, diremos que es infinito.

Definición 7 (σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$). *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$, la cual será denotada por $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, es la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ generada por la familia de todos los intervalos de números reales. A los elementos de esa σ-álgebra los llamaremos borelianos de $\mathbb{R}$.*

Ejercicio 4. *Demuestra que la σ-álgebra de los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ está generada por cualquiera de las siguientes familias de conjuntos.*

1. *Los intervalos de la forma $(-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Los intervalos de la forma $(-\infty, x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.*
3. *Los intervalos de la forma $(a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.*
4. *Los intervalos de la forma $[a, b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.*
5. *Los intervalos de la forma (a, b), donde $a, b \in \mathbb{R}$.*
6. *Los intervalos de la forma $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.*

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$

Definición 8. *Por una celda en $\mathbb{R}^n$ se entenderá un conjunto de la forma $I_1 \times \cdots \times I_n$, donde $I_1, \cdots, I_n$ son intervalos en $\mathbb{R}$.*

Obviamente, si $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ entonces R es un conjunto acotado si y sólo si los intervalos $I_1, \cdots, I_n$ son finitos. De la misma manera, R es un conjunto abierto (resp. cerrado) si y sólo si los intervalos $I_1, \cdots, I_n$ son abiertos (resp. cerrados).

Denotaremos por $\mathcal{R}$ a la familia de celdas en $\mathbb{R}^n$.

Definición 9 (σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$). *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, la cual será denotada por $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, es la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ generada por $\mathcal{R}$. A los elementos de esa σ-álgebra los llamaremos borelianos de $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 1. *La σ-álgebra generada por la familia de celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$.*

Demostración

Sea $\mathcal{H}$ la σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ generada por la familia de celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $U \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definamos la sucesión de intervalos $\left(J_k^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ y el intervalos J_k de la siguiente manera:

$$J_k = \begin{cases} (-\infty, x_k] & \text{si } k \notin U \\ \mathbb{R} & \text{si } k \in U \end{cases}$$

$$J_k^{(m)} = \begin{cases} (-\infty, x_k] & \text{si } k \notin U \\ (-\infty, m] & \text{si } k \in U \end{cases}$$

Se tiene:

$J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_1^{(m)} \times J_2^{(m)} \times \cdots \times J_n^{(m)}$.

Así que $J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n \in \mathcal{H}$.

Definamos $\mathcal{G} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$.

$(-\infty, x] \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}\times(-\infty, y]$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Por lo anterior, $I_1 \times \cdots \times I_n \in \mathcal{H}$, para cualquier celda $I_1 \times \cdots \times I_n$ donde $I_k \in \mathcal{G}$ para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

La familia de conjuntos $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ tales que $I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \times B \in \mathcal{H}$, para cualquier celda $I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ tal que $I_k \in \mathcal{G}$ para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, forma una σ-álgebra que contiene a los intervalos de la familia $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$; por lo tanto, contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

La familia de conjuntos $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ tales que $\mathbb{R} \times B \in \mathcal{H}$ y $(-\infty, x] \times B \in \mathcal{H}$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, forma una σ-álgebra que contiene a los intervalos de la familia $\{(-\infty, y] : y \in \mathbb{R}\}$; por lo tanto, contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

Así que, para cualquier $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} \times B \in \mathcal{H}$ y $(-\infty, x] \times B \in \mathcal{H}$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Para cualquier boreliano $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, La familia de conjuntos $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ tales que $A\times B \in \mathcal{H}$, forma una σ-álgebra que contiene a los intervalos de la familia $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$; por lo tanto, contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

Así que, para cualquier $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ y $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $A \times B \in \mathcal{H}$.

De la misma manera, si B_n es un boreliano de $\mathbb{R}$ cualquiera, entonces la familia de conjuntos $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ tales que $I_1 \times \cdots \times I_{n-2} \times B \times B_n \in \mathcal{H}$, para cualquier celda $I_1 \times \cdots \times I_{n-2}$ de $\mathbb{R}^{n-2}$ tal que $I_k \in \mathcal{G}$ para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, forma una σ-álgebra que contiene a los intervalos de la familia $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$; por lo tanto, contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

Continuando con este procedimiento, se obtiene que los conjuntos de la forma $I \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $I \in \mathcal{G}$ y $B_2, \ldots, B_n$ son borelianos cualesquiera de $\mathbb{R}$, pertenecen a $\mathcal{H}$.

Finalmente, si $B_2, \ldots, B_n$ son borelianos cualesquiera de $\mathbb{R}$, entonces la familia de conjuntos $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ tales que $B \times B_2 \times \ldots \times B_n \in \mathcal{H}$, forma una σ-álgebra que contiene a los intervalos de la familia $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$; por lo tanto, contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}$.

Así que, $\mathcal{H}$ contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$.

En particular, $\mathcal{H}$ contiene a cualquier celda en $\mathbb{R}^n$, así que contiene a todos los borelianos de $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, como $\mathcal{H} \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathcal{H} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

■

Corolario 1. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por la familia de celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Corolario 2. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ de la forma $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$, donde $B_1, \ldots, B_n$ son borelianos de $\mathbb{R}$.*

Proposición 2. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por cualquiera de las siguientes familias de conjuntos:*

1. $\mathcal{D}_1$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma*
   $(-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \cdots \times (-\infty, x_n)$,
   donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
2. $\mathcal{D}_2$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma*
   $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]$,
   donde $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
3. $\mathcal{D}_3$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma*
   $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$,
   donde $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mathcal{D}_4$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma*
   $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n)$,
   donde $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
5. $\mathcal{D}_5$*: Las celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma*
   $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$,
   donde $(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demostración

Denotemos por $\mathcal{D}$ a la familia de celdas de $\mathbb{R}^n$ de la forma:

$(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$,

donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

a) Sea $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n] \in \mathcal{D}$, entonces:

$(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$

$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(-\infty, x_1 + \frac{1}{m}\right) \times \left(-\infty, x_2 + \frac{1}{m}\right) \times \cdots \times \left(-\infty, x_n + \frac{1}{m}\right) \in \sigma\left(\mathcal{D}_1\right)$.

Así que, $\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right) = \sigma\left(\mathcal{D}\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_1\right)$.

Además, todo elemento de $\mathcal{D}_1$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$.

Por lo tanto, $\sigma\left(\mathcal{D}_1\right) = \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

b) Sea $(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n] \in \mathcal{D}$, entonces:

$(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \cdots \times (-\infty, x_n] = \bigcup_{m=1}^{\infty} (-m, x_1] \times (-m, x_2] \times \cdots \times (-m, x_n] \in \sigma\left(\mathcal{D}_2\right)$.

Así que, $\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right) = \sigma\left(\mathcal{D}\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_2\right)$.

Además, todo elemento de $\mathcal{D}_2$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$.

Por lo tanto, $\sigma\left(\mathcal{D}_2\right) = \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

c) Sea $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n] \in \mathcal{D}_2$ una celda no vacía, entonces:

$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n] = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(a_1, b_1 + \frac{1}{m}\right) \times \left(a_2, b_2 + \frac{1}{m}\right) \times \cdots \times \left(a_n, b_n + \frac{1}{m}\right) \in \sigma\left(\mathcal{D}_3\right)$.

Así que, $\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right) = \sigma\left(\mathcal{D}_2\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_3\right)$.

Además, todo elemento de $\mathcal{D}_3$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$.

Por lo tanto, $\sigma\left(\mathcal{D}_3\right) = \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

d) Sea $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{D}_3$ una celda no vacía, entonces:

$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[a_1 + \frac{1}{m}, b_1\right) \times \left[a_2 + \frac{1}{m}, b_2\right) \times \cdots \times \left[a_n + \frac{1}{m}, b_n\right) \in \sigma\left(\mathcal{D}_4\right)$.

Así que, $\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right) = \sigma\left(\mathcal{D}_3\right) \subset \sigma\left(\mathcal{D}_4\right)$.

Además, todo elemento de $\mathcal{D}_4$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$.

Por lo tanto, $\sigma\left(\mathcal{D}_4\right) = \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

e) Sea $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) \in \mathcal{D}_4$ una celda no vacía, entonces:

$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[a_1, b_1 - \frac{1}{m}\right] \times \left[a_2, b_2 - \frac{1}{m}\right] \times \cdots \times \left[a_n, b_n - \frac{1}{m}\right] \in \sigma\left(\mathcal{D}_5\right)$.

Así que, $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{D}_4) \subset \sigma(\mathcal{D}_5)$.

Además, todo elemento de $\mathcal{D}_5$ es un boreliano de $\mathbb{R}^n$.

Por lo tanto, $\sigma(\mathcal{D}_5) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

$\blacksquare$

Proposición 3. *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ está generada por la familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración

Sea G un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces, para cada $x \in G$ existe una bola abierta B de centro x y radio $s > 0$ contenida en G.

Sea r un número racional positivo menor que s y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ un elemento de la bola abierta de centro x y radio $\frac{1}{2n}r$ tal que, para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y_k es un número racional.

Obviamente x pertenece a la bola abierta de centro y y radio $\frac{1}{2n}r$, la cual está contenida en B.

Definamos:

$$C = \left(y_1 - \tfrac{1}{2n}r, y_1 + \tfrac{1}{2n}r\right) \times \left(y_2 - \tfrac{1}{2n}r, y_2 + \tfrac{1}{2n}r\right) \times \cdots \times \left(y_n - \tfrac{1}{2n}r, y_n + \tfrac{1}{2n}r\right).$$

La distancia entre dos elementos cualesquiera de C es menor que la distancia entre los puntos $\left(y_1 - \frac{1}{2n}r, y_2 - \frac{1}{2n}r, \ldots, y_n - \frac{1}{2n}r\right)$ y $\left(y_1 + \frac{1}{2n}r, y_2 + \frac{1}{2n}r, \ldots, y_n + \frac{1}{2n}r\right)$, la cual es igual a $\frac{1}{\sqrt{n}}r$.

Como x pertenece a la bola abierta de centro y y radio $\frac{1}{2n}r$, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $|x_k - y_k| < \frac{1}{2n}r$ para cualquier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, así que $x \in C$. Por lo tanto, si $z \in C$, entonces:

$$d(z, x) < \tfrac{1}{\sqrt{n}}r \leq r < s.$$

Así que $C \subset B \subset G$.

Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de celdas en $\mathbb{R}^n$ de la forma $(r_1, s_1) \times (r_2, s_2) \times \cdots \times (r_n, s_n)$, donde $r_1, s_1, r_2, s_2, \ldots, r_n, s_n$ son números racionales. $\mathcal{C}$ es entonces un conjunto numerable y, por lo anterior, para cada $x \in G$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$ y $C \subset G$.

Por lo tanto, G se puede expresar como la unión de una colección finita o infinita numerable de conjuntos en $\mathcal{C}$, cada uno de los cuales un boreliano de $\mathbb{R}^n$. Así que G es un boreliano de $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, la familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ contiene a las celdas en $\mathbb{R}^n$ de la forma $(-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \cdots \times (-\infty, x_n)$, donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, las cuales generan a la

σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$. Así que también la familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ genera a la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$.

$\blacksquare$